

Newsletter 01/2014:

Geometrie und Rechnenlernen gehören zusammen.

Liebe Leserinnen und Leser,

neben der Arithmetik ist die Geometrie ein fester Bestandteil des Mathematikunterrichts. Unser Newsletter möchte aufzeigen, warum es für Kinder sinnvoll und zugleich spannend ist, beide Bereiche beim Lernen miteinander zu verknüpfen.

Wir wünschen Ihnen viel Freude beim Lesen!

Dr. Andrea Schulz

Leiterin des Systems der Duden Institute für Lerntherapie

Geometrie als Hilfe und Prävention bei Rechenschwäche?

Von Jana Köppen, Leiterin des Fachbereichs Mathematik der Duden Institute für Lerntherapie

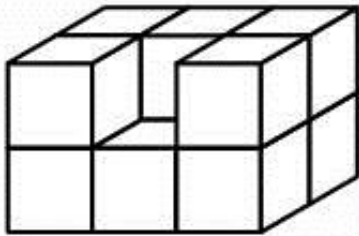
„Wir leben in einem Universum voller Muster ... Menschlicher Geist und menschliche Kultur haben ein formales Denksystem entwickelt, um Muster zu erkennen, klassifizieren und ausnutzen zu können. Wir nennen dieses System Mathematik ...“ (Ian Stewart in: „Die Zahlen der Natur“. Heidelberg 1998, S. 11)

Kinder mit erheblichen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen fallen dem Umfeld besonders aufgrund ihrer „schlechten“ Rechenleistungen auf: Oft bearbeiten sie Additions- und Subtraktionsaufgaben zählend und behelfen sich mit aufwendigen „Tricks“. Das Umfeld der betroffenen Kinder und Jugendlichen beschreibt zudem häufig, dass sich die Kinder unter Zahlen nichts vorstellen können. Als Schlussfolgerung befasst

sich Hilfe für diese Kinder mit dem Gewinnen von Einsichten in Zahlenraum, Zahlvorstellungen und Rechenoperationen. Das ist auch richtig so, aber hier sollen Argumente dargelegt werden, die den Blick weiten und zusätzlich der Geometrie ihren berechtigten Stellenwert einräumen.

Rechenschwäche wird oft reduziert auf Nicht-rechnen-Können.

Entwicklungsverzögerungen in kognitiven Fähigkeiten und Erfahrungsmängel spiegeln sich im mathematischen Bereich jedoch häufig auch im Umgang mit geometrischen Inhalten wider. Vorstellungs- und Abstraktionsprobleme beim Verständnis der Körperformen zeigen sich z. B. im Verwechseln der Begriffe zu Körpern und Flächen sowie in den Schwierigkeiten der Kinder beim Benennen von Eigenschaften. Wenn diese formal auswendig gelernt werden, ist eventuell für das Kind gar nicht geklärt, was beispielsweise überhaupt eine Kante ist.



Auffälligkeiten im räumlichen Vorstellungsvermögen zeigen sich auch im Umgang mit Würfelbauten. Kann ein Grundschulkind die ebene Darstellung einer Anordnung von Würfeln, wie in der Abbildung links gezeigt, erfassen, z. B. nachbauen oder die Anzahl der benötigten Würfel bestimmen? Wozu soll das wichtig sein, wenn doch das Rechnenlernen viel wichtiger erscheint?

Hier einige Argumente, die helfen sollen, der Geometrie bei der Förderung von Kindern mit Lernschwierigkeiten mehr Gewicht zu geben:

- Fast jedes Denken, jede kognitive Kompetenz bedient sich visueller, d. h. geometrischer Stützen. Visuell-geometrische Erfahrungen und ein entsprechendes Können sind von grundlegender Bedeutung für die kognitive Entwicklung jedes Kindes.
- Bei der Vorstellung des Zahlenraums und über das Durchführen von Rechenoperationen liegen räumliche Denkbilder zugrunde. Schwierigkeiten in der Raumvorstellung sind eine häufige Ursache für Rechenschwäche.
- Die Beschäftigung mit der Geometrie erlaubt den Kindern, ihre Erfahrungen im Umgang mit geometrischen Objekten aus Alltag und Spiel aufzugreifen und ihre Umwelt besser zu erschließen. Durch die Auseinandersetzung mit geometrischen Inhalten erfolgt eine hohe Motivation für das Mathematiklernen. Beides stärkt das Selbstvertrauen der Kinder, das durch Misserfolge beim Rechnen oft sehr belastet ist.

- Die Ausbildung arithmetischer Begriffe hängt eng mit der Entwicklung geometrischer Grundvorstellungen zusammen. Beispiel: Wenn Kinder in der integrativen Lerntherapie haptische Materialien nutzen, um ihre Zahlvorstellungen weiterzuentwickeln, spielen räumliche Anordnungen und räumliche Strukturen eine Rolle. Um diese erfassen zu können, bedarf es räumlicher Vorstellungsfähigkeiten.

Die Entwicklung geometrischer Denkweisen fördert wichtige **Voraussetzungen für die Entwicklung von Zahlvorstellungen**, da es dem Kind gelingen muss, innere Vorstellungsbilder aufzubauen. Beim Rechnenlernen geht es schließlich darum, Denkbilder zu verändern. Zusätzlich werden Orientierung und Abstraktionsvermögen geschult. Die Beschäftigung mit geometrischen Inhalten trägt somit zur Prävention und Überwindung von Rechenstörungen maßgeblich bei.

Praktisch sollte daraus folgen, dass alle Kinder und insbesondere diejenigen, die bereits viele Misserfolge im arithmetischen Bereich erlebt haben, viel und vor allem kontinuierlich Gelegenheit erhalten, Erfahrungen im geometrischen Bereich zu sammeln.



Da Modelle und Repräsentanten zu Körperformen – im Gegensatz zu Flächenformen – sinnlich wahrnehmbar sind, sollten sie der Betrachtung von Flächenformen zeitlich bevorzugt werden. Modelle z. B. in Gestalt von Holz- oder Plastikformen können immer wieder betastet, beschrieben und

benannt werden. Im Umfeld wird nach Beispielen gesucht: Eine Tasse oder eine Dose können zylinderförmig sein, Schränke und Bücher sind meist quaderförmig usw. Körpermodelle können aus Knetmasse geformt werden.



Räumliche Anordnungen lassen sich mit Würfeln und weiteren Bausteinen aufbauen. Zeichnen mit und ohne Hilfsmittel, Falten von Origamifiguren, die Beschäftigung mit Mustern und Spiegelbildern und viele, viele weitere geometrische Inhalte werden von Kindern mit Lernschwierigkeiten mit großer Begeisterung aufgegriffen.

Neben den positiven Auswirkungen dieser Freude auf das Selbstvertrauen entwickeln sich dadurch kognitive Lernvoraussetzungen für erfolgreiches Mathematiklernen weiter. Deshalb wird die Arbeit an geometrischen Inhalten von der ersten Therapiestunde an in die Duden-Lerntherapie miteinbezogen.

Geometrie – Quelle der Neugier und des Lernens

Von Dr. Christian Werge, Universität Leipzig, Mitarbeiter im Bereich Didaktik des Mathematischen Instituts

Fast genau vor 450 Jahren, am 15. Februar 1564, wurde der Begründer der modernen naturwissenschaftlichen Forschung, **Galileo Galilei**, geboren. Überliefert ist seine hohe Meinung von der Geometrie:

"Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen."

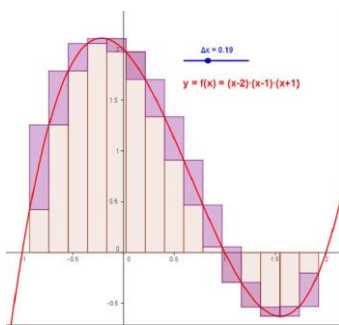
Zu seiner Zeit hatte die Geometrie schon eine fast fünftausendjährige Geschichte, beginnend vielleicht bei Spiralen auf Megalithgräbern oder Mustern auf Tonscherben, und ihren ersten Höhepunkt als Wissenschaft hinter sich (Pythagoras, Thales und Euklid). Die antiken griechischen Geometer haben die Entwicklung der Mathematik stark beeinflusst, z. B. durch sogar in die Alltagssprache aufgenommene Probleme wie die „Quadratur des Kreises“. Erst zweitausend Jahre später konnte im Jahr 1882 der deutsche Mathematiker Lindemann (1852-1939) mit algebraischen Mitteln beweisen, dass dieses geometrische Problem unlösbar ist.

Schaut man in Schul(jahr)bücher des 19. Jahrhunderts, fällt der hohe Stellenwert auf, den die Geometrie genoss. Eine Kostprobe: „Einen Kreis zu construiren, welcher durch zwei gegebene Punkte P und P_1 geht, und die Peripherie eines seiner Lage und Größe nach gegebenen Kreises halbirt ...“ (Mathe-Abituraufgabe Nr. 1 des Berliner Friedrichs-Gymnasiums, Ostern 1861).

Und heute? Die „Welt“ schreibt „Deutschland braucht Nachhilfe in Mathe“ und bezieht sich auf den großen Mathematiktest, den die ZEIT, die Stiftung Rechnen und das Meinungsforschungsinstitut Forsa im April 2013 mit mehr als eintausend repräsentativ ausgewählten Deutschen durchgeführt haben. Deutliche Schwierigkeiten bereiteten die geometrischen Aufgaben, z. B. (Aufg. 27): „Die Kantenlänge eines Würfels wird verdoppelt. Was passiert mit dem Volumen?“ Anzukreuzen war eine von fünf Auswahlantworten und nur ganze 33 % haben sich für „verachtfacht sich“ entschieden.

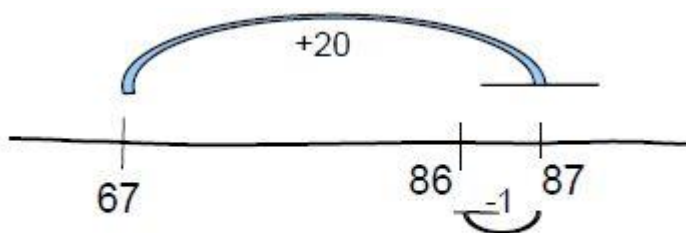
Ist dieses Ergebnis auf eine Unterschätzung der Geometrie und eine Überschätzung der Arithmetik und Algebra beim Mathematiklernen zurückzuführen? Die Didaktik der Mathematik gibt eine klare Antwort: Arithmetik und Geometrie gehören zusammen. „**Arithmetisierung** präzisiert, systematisiert und formalisiert das geometrische Denken; **Geometrisierung** mobilisiert, modelliert und ästhetisiert das arithmetische Denken“, schrieb Heinrich Winter 2003.

Sollte es eines Beweises dieser These bedürfen, hier ist er. 1992 stellte Stephan Dehaene sein *Triple-Code-Modell* vor, das **die Rolle eines „inneren Zahlenstrahls“** beim Lösen arithmetischer Aufgaben, insbesondere beim Schätzen und Überschlagen, eindrucksvoll beschrieb. Etwa zehn Jahre später konnten durch Untersuchungen von „rechnenden Probanden“ im Kernspintomografen diejenigen eng umgrenzten Hirnareale gefunden werden, die beim Ausführen bestimmter Rechnungen beteiligt sind. Und das Überraschende: Die infolge von Stoffwechselprozessen aufleuchtenden **Bezirke sind fast identisch mit denen, die beim Lösen geometrischer Aufgaben aktiv sind**. Das kann als ein Beleg dafür angesehen werden, dass jede Geometriestunde direkt der Arithmetik und Algebra, also dem Rechnen dient.



Weitere Argumente unterstreichen die enge Verknüpfung ebenso. So ist jede Veranschaulichung eines arithmetischen Sachverhalts geometrischer Natur, beginnend bei der Darstellung von Mengen mithilfe von Würfelbildern über die Tortenmodelle für die Bruchrechnung bis hin zu Abbildungen zum Verständnis der **Integralrechnung**.

Der nur sparsam beschriftete **Zahlenstrahl** hat längst Eingang in Schulbücher und Lernmaterialien gehalten. Im Verlauf der Grundschulzeit entfaltet sich der innere Zahlenstrahl und ist dann auch für sogenannte heuristische Rechenstrategien nutzbar. Die Aufgabe $67 + 19 = 86$, dargestellt auf einem „Rechenstrich“, wird kinderleicht, denn der Trick $67 + 20 - 1$ ist sichtbar.



Arithmetische Sachverhalte können unmittelbar geometrisch begriffen (im direkten Wortsinn) werden.

Man gibt beispielsweise einem Grundschulkind eine gewisse Anzahl gleich großer Würfel und fordert es auf, alle Würfel in einem Quader anzuordnen. Es wird für 12 Würfel vier grundsätzlich verschiedene Quader finden ($1 \cdot 1 \cdot 12$, $1 \cdot 2 \cdot 6$, $1 \cdot 3 \cdot 4$, $2 \cdot 2 \cdot 3$), dagegen bei der Primzahl 13 nur genau einen ($1 \cdot 1 \cdot 13$).

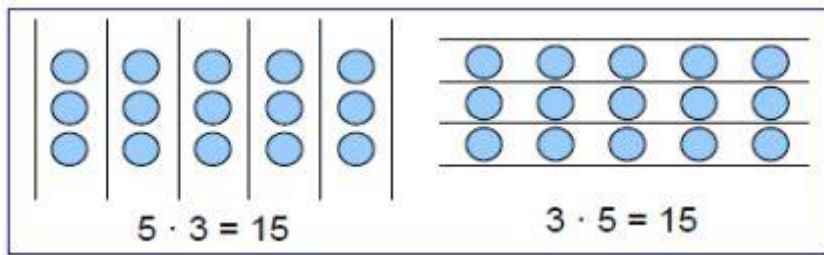
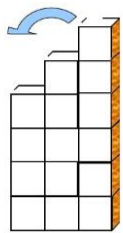


Abb. 3

Beim Multiplizieren dürfen Faktoren vertauscht werden. In der oben dargestellten Anordnung (Abb. 3) wird es sichtbar. Sichtbar wird aber auch, dass der Betrachter je nach Reihenfolge der Faktoren eine andere Strukturierung vornehmen muss.



Oder wie wäre es mit einem Beispiel zur **Teilbarkeit**: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets durch 3 teilbar. Das erkennt hier schon ein Grundschulkind: Das beliebig hoch errichtete **Würfelgebäude** wird etwas umgebaut und schon ist das Dreifache der mittleren Höhe sichtbar. (Abb. 4)

Abb. 4

Neue rechnerische und grafische Möglichkeiten für die Lösung geometrischer Probleme eröffneten sich mit der Nutzung von Computern. Zum Beispiel gestattet das populäre dynamische Geometriesystem „GeoGebra“, zu konstruieren und parallel dazu Berechnungen anzustellen. (Die Abbildung 1 zur Veranschaulichung eines Integrals wurde zum Beispiel auch mit dieser Software erstellt.)

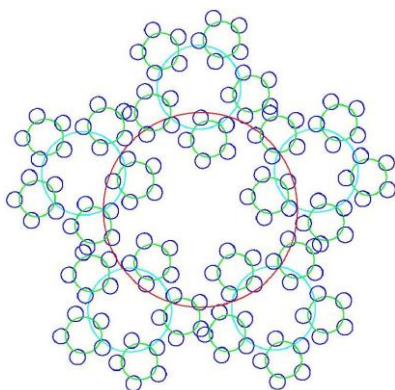


Abb. 5

Ein weiteres Beispiel für die Möglichkeiten des Computers: Die Zeichnung (Abb. 5), die farbenfroh an eine Frühlingswiese erinnert, veranschaulicht **Potenzen natürlicher Zahlen**: Der rote Kreis ist $50 = 1$ -mal da, von den türkisfarbigen Blüten gibt es $51 = 5$, von den hellgrünen $52 = 25$ usw. Die Blume wird immer größer und verzweigter wenn man diesen Verfahren fortsetzt. Dafür wurde ein kurzes Computerprogramm („Fuenfkreis“) in der Sprache FMS-Logo genutzt.

Abschließend kehren wir zur Geschichte der Mathematik zurück. In seinem Buch „Vom Feldmessen“ schrieb Helmreich schon 1591: *„Darumb die Geometria und Arithmetica mit einander verschwistert und also vereiniget/ das die Geometria ihre stummende und deutende Demonstrationes durch die Rechenkunst mus offenbaren/ außreden und an tag bringen.“*

Geometrie ohne das Rechnen zu betreiben erschien ihm also zu wenig. So und umgekehrt gilt es für unsere Kinder auch heutzutage.

Pentomino - Ernsthafte Spielspaß in der Lerntherapie

Dr. Christian Werge, Leiter des Duden Instituts für Lerntherapie Halle

Eine wichtige Voraussetzung für das Erlernen des Rechnens ist die Geometrie. „[Sie] ... ist das Eingangstor zur Naturwissenschaft, und dieses Tor ist so niedrig und so eng, dass du es nur als Kind durchschreiten kannst“, schrieb bereits der englische Mathematiker W. K. Clifford (1845 –1879).

Da sich das räumliche Vorstellungsvermögen demnach am besten in jungen Jahren entwickelt, liegt es nahe, Kindern die Grundlagen der Geometrie spielerisch zu vermitteln. Besonders gut eignet sich dafür das Pentomino-Puzzle, da es ein unerschöpfliches Reservoir an leichten, aber auch sehr anspruchsvollen Aufgaben bietet. Zudem ist es leicht herzustellen und kann von Kindern farbenfroh gestaltet werden.

Seit der amerikanische Mathematiker Solomon W. Golomb (*1932) im Jahr 1954 in einer Zeitschrift das Pentomino-Puzzle vorstellte, eroberte es weltweit die Klassenzimmer. Das Puzzle kommt auch in unseren Duden Instituten für Lerntherapie für zahlreiche Zielstellungen zum Einsatz.

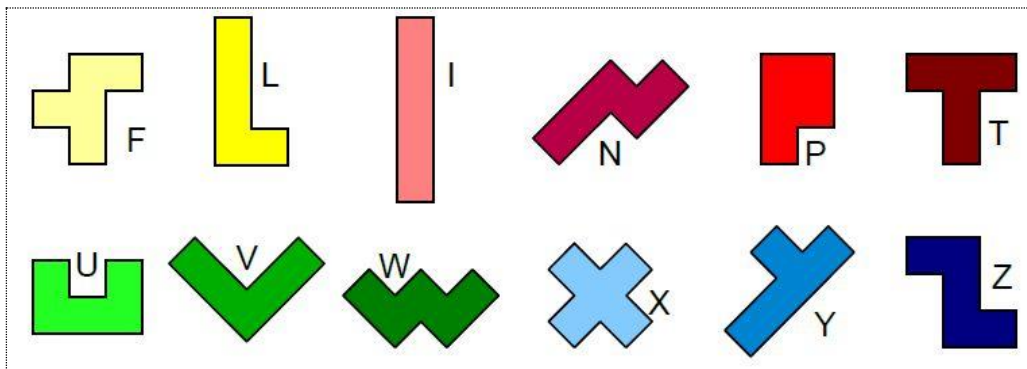


Abb. 1

In der einfachsten Form entsteht das Puzzle, wenn man **je 5 gleich große Quadrate (griech. pente: fünf) zu 12 verschiedenen Puzzleteilen, den Pentominos, aneinanderfügt** (Abb. 1). Daraufhin beginnt das Kind mit dem Puzzeln, um in der klassischen Variante eine bestimmte Figur mit allen 12 Teilen auszufüllen.



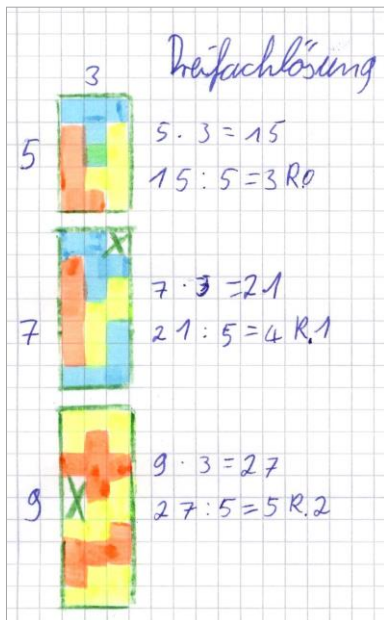
Einfache Figuren können auch schon von Vorschulkindern gelegt werden, bei größeren zu füllenden Flächen kommen oft auch Eltern und Lehrer ins Schwitzen.



Die nächste Herausforderung für die Schüler könnte es sein, aus den Puzzleteilen **ein Rechteck zu legen**, das z. B. 5 Quadratseiten lang und 4 Quadratseiten breit ist. Dazu benötigt man nicht alle, sondern nur 4 der Pentominos, aber ungeübten Kindern und auch Erwachsenen wird es trotzdem anfangs nicht

leichtfallen, nur eine der **92 verschiedenen Lösungen** zu finden.

Noch spannender ist es aber, im nächsten Schritt Rechtecke zu legen, die z. B. 7 Quadrate lang und 3 breit oder 8 Quadrate lang und 4 breit sind. „Das geht ja gar nicht!“, wird der aufmerksame Leser sagen, denn 21 ($7 \cdot 3$) ist ebenso wenig wie 32 ($8 \cdot 4$) durch 5 teilbar. Aber gerade das macht das Pentomino-Puzzle so interessant für den Einsatz in der Lerntherapie.



Nehmen wir z. B. die zuletzt genannte Aufgabe: Das Kind berechnet $8 \cdot 4 = 32$ und überlegt nun, „**wie oft 5 in 32 passt**“ oder, anders gesagt, wie viele Fünflinge auf das Rechteck gelegt werden können ($32 : 5 = 6$). Das ist eine der **Grundvorstellungen beim Dividieren (Aufteilen)** und darüber hinaus kann das Kind nun im doppelten Wortsinn begreifen, dass bei dieser Divisionsaufgabe ein Rest von 2 bleibt. Alle Glieder dieser Divisionsaufgabe können unmittelbar mit der Lösung in Verbindung gebracht werden: $8 \cdot 4 = 32$ quadratische Felder sind zu belegen, stets sind in den Pentominos **5** Quadrate zusammengefügt, **6** Pentominos passen in die Form und es bleiben **2** Lücken.

Die Lösungszeit solcher Rätsel bleibt überschaubar, wenn nicht alle 12 Pentominos verwendet werden oder die Position der Lücken nicht vorgeschrieben wird.

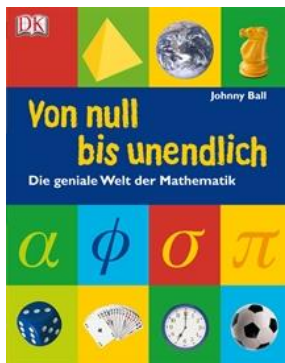
Man kann mit den Pentominos alle Rechtecke ab einer Breite von 3 bis hin zum „Schachbrett“ ($8 \cdot 8 = 64$; $64 : 5 = 12$ Rest 4) legen. Als Hilfe könnten z. B. einzelne Puzzleteile schon an geeignete Stellen gesetzt werden. Am schwersten zu lösen sind dabei die Rechtecke, die den Flächeninhalt 60 bzw. die Quader, die das Volumen 60 haben, z. B. $3 \cdot 20$ oder $2 \cdot 5 \cdot 6$, bei denen man alle Puzzleteile verwendet.

Haben sich die Kinder in der Lerntherapie erst einmal mit den Pentominos vertraut gemacht, regen wir auch **kopfgeometrische Übungen** an. Mit unterschiedlich gefärbten Legeplättchen lösen sie einfache Rätsel ohne Zugriff auf die Puzzleteile. Sie wählen einzelne aus, drehen und wenden sie in ihrer Vorstellung. Schließlich zeichnen sie ihre

Lösungen auf, spiegeln sie an einer Achse, drehen sie um 180° oder vergrößern eine Figur – alles anspruchsvolle Tätigkeiten zur **Weiterentwicklung sowohl ihres räumlichen Vorstellungsvermögens als auch ihrer Orientierungsfähigkeit.**

Mit welcher Begeisterung dieses vielseitige Spiel innerhalb der Lerntherapie angenommen wird, belegen die mit Fantasie und Freude ausgeführten Zeichnungen.

Noch mehr Mathematik? Buch-und Spieltipps zu Geometrie & mehr



Johnny Ball: „**Von null bis unendlich. Die geniale Welt der Mathematik**“

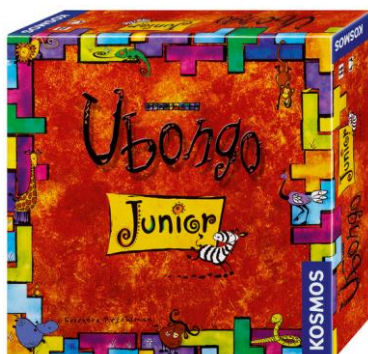
Dorling Kindersley 2009

ISBN: 978-3-8310-1433-0

Wer Mathematik und ihre Einbettung in die Naturwissenschaften mag oder etwas dafür tun möchte, es mehr zu mögen, liegt mit diesem Buch für Kinder ab ca. 10 J. genau richtig. Themen, die bereits vor Hunderten von Jahren relevant waren, wie die Vermessung von Land und die Erstellung von Karten, werden ebenso aufgegriffen wie die Frage, was ein MP3-Player mit Mathematik zu tun hat. Die Darstellung der Themen ist mit Bildern und überschaubaren Textlängen sehr gelungen. Häufig wird ein Objekt oder ein Problem auf einer Doppelseite dargestellt. Zudem können die Themen nach Lust und Laune in beliebiger Reihenfolge angeschaut werden.

Übrigens ist das Buch auch für Eltern und Erwachsene geeignet, um sich für eine Mathematik zu begeistern, die über gewisse Schulerinnerungen hinausgeht.

Apps zum Bauen und Knobeln als Varianten des bekannten Spiels *Tetris* erhält man in der **Rubrik „Bausteinrätsel“** in den jeweiligen App-Stores. In unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden sollen Bauelemente so eingepasst werden, dass eine vorgegebene Fläche lückenlos ausgefüllt wird.



Wer lieber mit Gegenständen hantiert und mit anderen gemeinsam spielen möchte, greift zum Gesellschaftsspiel **Ubongo** von KOSMOS. Das Spiel ist in vielen verschiedenen Varianten online bestellbar.

(<http://www.kosmos.de/content-183-183/ubongo>)

Aus den Instituten: Teilnahme am Projekt "Mathe in Mitte"

Jedes Kind kann rechnen lernen!

Die Duden Institute für Lerntherapie betreuen im Rahmen des Projektes „Mathe in Mitte - Vom Zählen zum Rechnen“ der Berliner Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft die Lehrerinnen und Kinder der ersten Klassen in fünf Berliner Grundschulen aus Mitte: Grundschule am Brandenburger Tor, Brüder-Grimm-Grundschule, die Papageno-Grundschule, Gustav-Falke-Grundschule und die Miriam-Makeba-Grundschule.

Ziel ist es, allen Schülerinnen und Schülern in den JüL-Klassen dieser Projektschulen den Zugang zur Mathematik erfolgreich zu ermöglichen.

Bausteine des Projektes sind:

- Konzentration auf wichtige Schwerpunkte des Mathematikunterrichtes für die Lernanfänger in 10 Übungssequenzen, die im Mittelpunkt des fachlichen Austauschs zwischen Lehrerinnen und Lerntherapeuten des Duden Institutes stehen.
- Verbindung von Theorie und Praxis durch engen Austausch und Reflexion
- Individuelle Beratung für die Lehrerinnen durch einen Lerntherapeuten des Duden Institutes als festen Ansprechpartner

Veranstaltungen

Informationen zu den Veranstaltungen der Duden Institute für Lerntherapie finden Sie unter: http://www.duden-institute.de/1217_Veranstaltungen.htm

Impressum

Herausgeber:

Duden Institute für Lerntherapie
Zentrale
Bouchéstr. 12, Haus 11
12435 Berlin
Telefon: 030 53311822
E-Mail: zentrale@duden-institute.de
www.duden-institute.de